
Devoir surveillé 7

On attachera comme toujours un soin tout particulier à la rédaction, toutes les réponses devront être justifiées. N'hésitez surtout pas à faire des phrases ; par contre, hésitez suffisamment longtemps avant d'écrire des choses qui n'auraient pas de sens.

L'utilisation de tout matériel électronique est interdite.

Ce sujet contient trois problèmes indépendants.

Durée : 4h.

Problème 1 — La petite boule rouge

Les deux parties de ce problème sont indépendantes.

Partie I : La main dans le sac

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

Un sac contient un jeton numéroté 1, deux jetons numérotés 2, ..., et n jetons numérotés n .

On dispose également de n urnes : pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, l'urne U_i contient i boules rouges et $n - i$ boules bleues.

On tire au hasard un jeton dans le sac, puis on tire une boule dans l'urne portant le numéro tiré.

1. Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ?
2. On tire une boule rouge. Quelle est alors la probabilité qu'on l'ait tirée dans l'urne U_n ?

Partie II : Quand le cœur rythme la cadence (d'après un oral G2E 2024)

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soit $p \in [0; 1]$.

Une urne U contient n boules numérotées de 1 à n .

Une urne V contient des boules, dont une proportion p de boules rouges.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire une boule au hasard dans l'urne U et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.

On tire ensuite, avec remise, autant de boules dans l'urne V que le numéro obtenu pour X .

On note alors Y le nombre de boules rouges obtenues sur ces tirages.

3. Donner la loi de la variable aléatoire X et calculer son espérance.
4. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y . *Les résultats seront donnés sous forme de sommes.*
5. Calculer le nombre moyen de boules rouges obtenues dans cette expérience.

Problème 2 — Chaque sensation à pile ou face

Soit $p \in]0; 1[$. On dispose d'une pièce de monnaie qui tombe sur le côté pile avec probabilité p .

On effectue des lancers successifs de la pièce.

1. Calculer la probabilité que les trois premiers lancers donnent face.
2. Soit n un entier naturel non nul.

On effectue successivement n lancers de la pièce.

Déterminer la loi des variables aléatoires suivantes :

- (a) la variable aléatoire valant 1 si on obtient pile au n -ième lancer et 0 sinon ;
 - (b) la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenues ;
 - (c) la variable aléatoire valant 0 si on n'obtient que des faces, et valant le numéro du premier lancer auquel on obtient pile sinon.
3. Écrire une fonction en Python qui prend en arguments un entier n et un flottant $p \in [0; 1]$, et qui renvoie le nombre de piles obtenues sur n lancers de la pièce.
 4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons A_n l'évènement «Le nombre de piles obtenues sur les n premiers lancers est impair.» et posons $p_n = \mathbb{P}(A_n)$.
 - (a) Calculer p_1 .
 - (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, établir une relation entre p_{n+1} et p_n , à l'aide de la formule des probabilités totales.
 - (c) En déduire la valeur de p_n , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Problème 3 — On peut lancer mille fois un dé

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

On lance successivement n dés équilibrés à six faces.

1.
 - (a) Déterminer l'univers Ω de cette expérience aléatoire.
 - (b) De quelle probabilité munit-on l'univers ?
2.
 - (a) Si $n = 2$, décrire l'évènement «La somme des deux résultats obtenus vaut 8.».
 - (b) Si $n = 3$, décrire l'évènement «La somme des deux premiers résultats obtenus vaut 3.».
3. Dans cette question, on suppose que $n = 3$. Calculer la probabilité des évènements suivants.
 - (a) Les trois résultats obtenus sont tous différents.
 - (b) Les trois nombres obtenus forment une suite strictement croissante.
4. On suppose à présent que $n \geq 3$. Calculer la probabilité des évènements suivants.
 - (a) On obtient au moins un 6 sur les n lancers.
 - (b) Les n résultats obtenus sont tous identiques.
 - (c) Sur les n résultats, on obtient trois fois le chiffre 6 et $n - 3$ fois le chiffre 1.

À la fin du jeu, on range les n dés au hasard dans cinq boîtes numérotées de 1 à 5.

5. Quel est le nombre moyen de dés qui seront rangés dans la première boîte ?

